

Método dos deslocamentos

mudança de convenção: Convenção de grintou

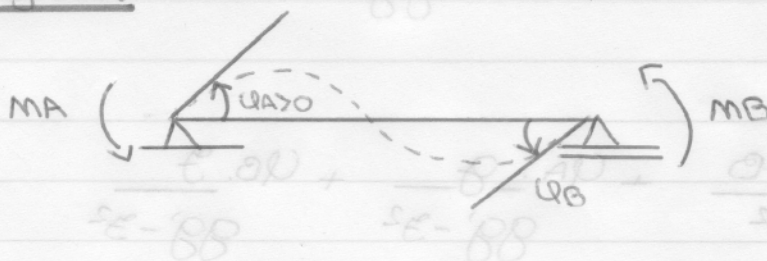
ψ : $\psi > 0$ quando anti-heráreo

M : momento aplicado no nó > 0 quando anti-heráreo

Antigamente:



Convenção de grintou



Equações fundamentais:

$$\begin{cases} -\psi_A = \alpha - M_A \cdot g + M_B \cdot \beta \\ \psi_B = \beta - M_A \cdot \beta + M_B \cdot g \end{cases}$$

Mudança de Paradigma

• Método dos deslocamentos: quais são os deslocamentos nos nós tal que a compatibilidade esteja satisfeita

• Método dos deslocamentos: quais são os deslocamentos tal que o equilíbrio esteja satisfeito.

Estudo de uma viga

Problema: quais são os momentos M_A, M_B que precisam ser aplicados tal que os giros ψ_A e ψ_B sejam anulados.

Dadas as equações fundamentais

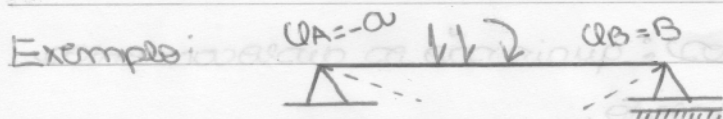
$$\begin{cases} \psi_A = -\alpha + M_A g' - M_B \beta \\ \psi_B = \beta - M_A \beta + M_B g \end{cases}$$

$$M_A = \frac{\begin{vmatrix} \psi_A + \alpha & -\beta \\ \psi_B - \beta & g \end{vmatrix}}{gg' - \beta^2} = \frac{g(\psi_A + \alpha) + \beta(\psi_B - \beta)}{gg' - \beta^2}$$

$$M_A = \frac{g\alpha - \beta\psi_B}{gg' - \beta^2} - \frac{\psi_A g}{gg' - \beta^2} + \frac{\psi_B \beta}{gg' - \beta^2}$$

$$M_B = \frac{\begin{vmatrix} g' & \psi_A + \alpha \\ -\beta & \psi_B - \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g' & -\beta \\ -\beta & g \end{vmatrix}} = \frac{g'(\psi_B - \beta) + \beta(\psi_A + \alpha)}{gg' - \beta^2}$$

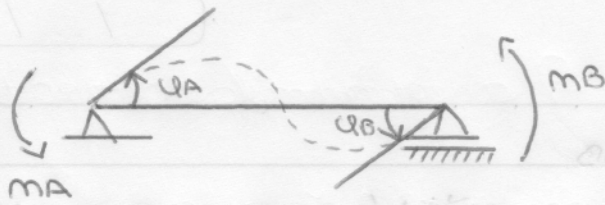
$$M_B = -\frac{g'\beta + \beta\alpha}{gg' - \beta^2} + \frac{\beta}{gg' - \beta^2} \psi_A - \frac{g'}{gg' - \beta^2} \psi_B$$



$\alpha, \beta, g, g', \beta$

Para quaisquer ψ_A e ψ_B consigo calcular M_A e M_B .

13 / 03 / 13



$$M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{6} + U_A \cdot L + U_B \cdot \frac{L}{2}$$

$$M_B = -\frac{q \cdot L^2}{6} + \frac{q \cdot L^2}{2} + U_A \cdot \frac{L}{2} + U_B \cdot L$$

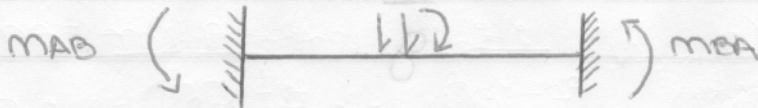
Para a viga bi-apoiada: $M_A = M_B = 0$

$$0 = \frac{q \cdot L^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{6} + U_A \cdot L + U_B \cdot \frac{L}{2}$$

$$0 = -\frac{q \cdot L^2}{6} + \frac{q \cdot L^2}{2} + U_A \cdot \frac{L}{2} + U_B \cdot L$$

$U_A = -\frac{q \cdot L}{2}$
 $U_B = \frac{q \cdot L}{2}$ é a solução deste sistema

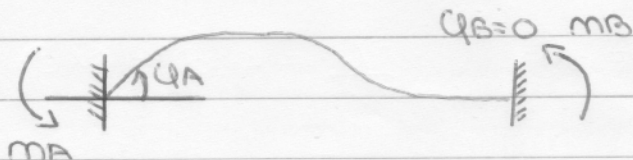
Cases particulares - NOTAÇÃO



Dada uma viga bi-engastada ($U_A = U_B = 0$) quais são os momentos M_A e M_B que precisamos ter aplicados para sustentar esta configuração?

$$M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{6} = M_{AB} \quad M_B = -\frac{q \cdot L^2}{6} + \frac{q \cdot L^2}{2} = M_{BA} = M_A$$

Caso particular:



não há carregamento interno

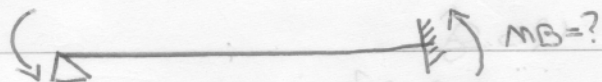
Das equações fundamentais:

$$M_A = \frac{q}{8q^2 - 3^2} \equiv \beta_{AB} \text{ coeficiente de rigidez}$$

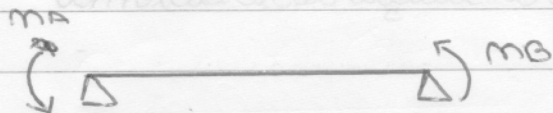
$$M_B = \frac{3}{8q^2 - 3^2}$$

Caso particular:

M_A



Qual o momento M_B tal que $\theta_B = 0$



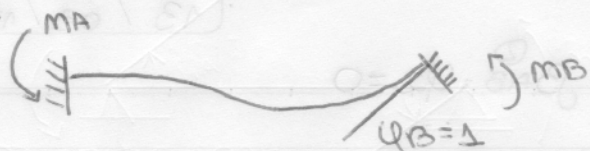
$$\theta_B = \theta - M_A \cdot 3 + M_B \cdot q = 0 \rightarrow M_B = M_A \cdot \frac{3}{q} = M_A \cdot \alpha_{AB}$$

$\alpha_{AB} \rightarrow$ fator de transmissão

Expressões fundamentais p/ o método dos deslocamentos:

$$\begin{cases} M_A = M_{AB} + \beta_{AB} \cdot \theta_A + \gamma_{AB} \cdot \alpha_{AB} \theta_B \\ M_B = M_{BA} + \beta_{BA} \cdot \theta_B + \gamma_{BA} \cdot \alpha_{BA} \theta_A \end{cases}$$

13 / 03 / 13



$$M_A = \frac{3}{8g' - 3^2}$$

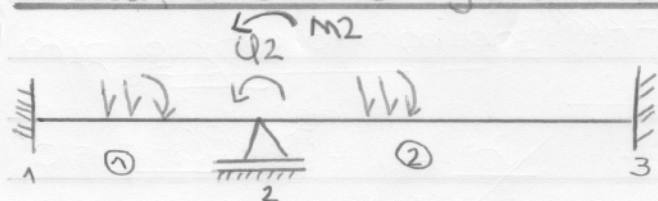
$$M_B = \frac{g'}{8g' - 3^2} \equiv \beta_{BA}$$

$$\equiv \alpha_{BA} \cdot \beta_{BA}$$

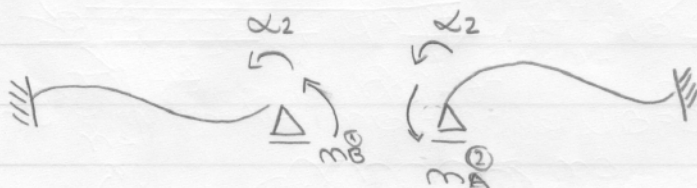
β_{BA} : coeficiente de rigidez

α_{BA} : coeficiente de transmissão

Redução de uma viga contínua



Supõe-se ϕ_2 conhecido



Dado α_2 , qual o momento que deve aplicar p/ no sustentav e deslocamento tal que o equiíbrio esteja satisfeito

Qual o desl. tal que os esforços sejam nulos.

$$m_B^1 = m_{BA}^1 + \beta_{BA}^1 \phi_2$$

$$m_A^2 = m_{AB}^2 + \beta_{AB}^2 \phi_2$$

• O momento que precisa ser aplicado no nó 2 é:

$$M_2 = m_B^1 + m_A^2$$

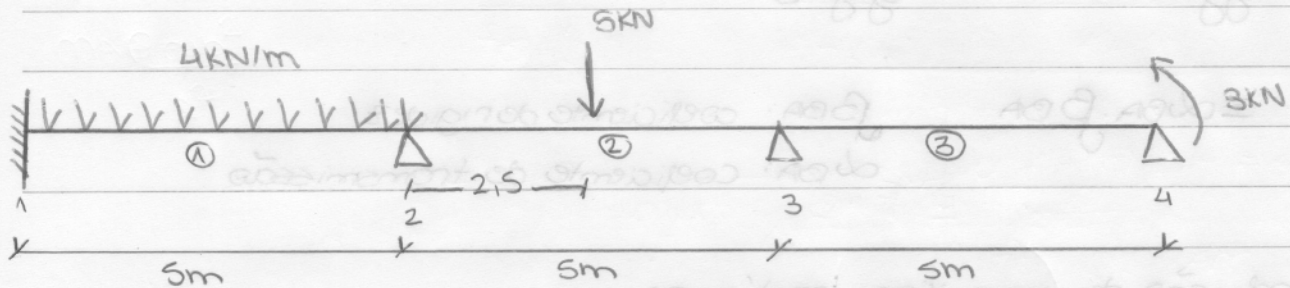
• método de redução é: qual o deslocamento tal que o equilíbrio esteja satisfeito.

$$\text{Equilíbrio: } M_2 = 0 = m_B^1 + m_A^2 = 0 \Rightarrow \phi_2$$

13 / 03 / 13

$$M_{BA}^{(1)} + \beta_{BA}^{(1)} \psi_2 + M_{AB}^{(2)} + \beta_{AB}^{(2)} \psi_2 = 0$$

$$\psi_2 = - \frac{(M_{BA}^{(1)} + M_{AB}^{(2)})}{\beta_{BA}^{(1)} + \beta_{AB}^{(2)}} //$$



$$EI = E_c I_c = 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Graus de liberdade: ψ_2, ψ_3, ψ_4

Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} M_2 = M_B^{(1)} + M_A^{(2)} = 0 \\ M_3 = M_B^{(2)} + M_A^{(3)} = 0 \\ M_4 = M_B^{(3)} = 3 \end{cases}$$

Viga 1:

$$M_A^{(1)} = M_{AB}^{(1)} + \beta_{AB}^{(1)} \psi_A^{(1)} + \beta_{AB}^{(1)} \psi_B^{(1)}$$

$$M_B^{(1)} = M_{BA}^{(1)} + \beta_{BA}^{(1)} \psi_A^{(1)} + \beta_{BA}^{(1)} \psi_B^{(1)}$$

$$\beta_{AB} = \frac{q}{99 - 3^2} = \frac{e'}{3} \cdot \frac{1}{\frac{e'^2}{9} - \frac{e'^2}{36}} = \frac{4}{e'}$$

$$\psi_{AB} = \frac{3}{9} = 0,5$$

esses valores são p/

VIGA BI-ENGASTADA SEMPRE

independente da

configuração dos eix

$$M_{BA} = -\frac{Pl^2}{12} = -8,33$$

$$a = \psi_3 = \psi_4 = \frac{P \cdot l^2 \cdot e'}{24} \quad M_{AB} = \frac{q \cdot a - 3\psi_3}{99 - 3^2} = \frac{\frac{Pl^2 e'}{24} \left(\frac{e'}{6} \right)}{\frac{e'^2}{12}} = \frac{Pl^2}{12} = 8,33$$

Viga 2

$$\beta_{AB} = \beta_{BA} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \alpha_{AB} = \alpha_{BA} = 0,5$$

$$M_{AB} = \frac{P \omega b^2}{\ell^2} = 3,125$$

$$M_{BA} = -M_{AB}$$

$$M_{BA} = -3,125$$

Viga 3

$$\beta_{AB} = \beta_{BA} = 0,8 \quad \alpha_{AB} = 0,5$$

$$M_{AB} = M_{BA} = 0 \quad (\text{mão tem força})$$

$$M_A^{\textcircled{1}} = 8,33 + 0,4 \cdot \varphi_2$$

$$\varphi_A^{\textcircled{1}} = 0$$

$$M_B^{\textcircled{1}} = -8,33 + 0,8 \varphi_2$$

$$M_A^{\textcircled{2}} = 3,125 + 0,8 \varphi_2 + 0,4 \varphi_3$$

$$M_B^{\textcircled{2}} = -3,125 + 0,4 \varphi_2 + 0,8 \varphi_3$$

$$M_A^{\textcircled{3}} = 0 + 0,8 \varphi_3 + 0,4 \varphi_4$$

$$M_B^{\textcircled{3}} = 0 + 0,4 \varphi_3 + 0,8 \varphi_4$$

$$\varphi_2: -5,21 + 1,6 \varphi_2 + 0,4 \varphi_3 = 0$$

$$\varphi_3: -3,125 + 0,4 \varphi_2 + 1,6 \varphi_3 + 0,4 \varphi_4 = 0$$

$$\varphi_4: 0,4 \varphi_3 + 0,8 \varphi_4 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1,6 & 0,4 \\ 0,4 & 1,6 \\ 0,4 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,21 \\ 3,125 \\ 3 \end{bmatrix}$$